La place de Jacques Herbrand dans la théorie des nombres de l'entre-deux-guerres

JACQUES HERBRAND.

Catherine Goldstein
CNRS- Institut de mathématique de Jussieu

Les publications en théorie des nombres

- *Nouvelle démonstration et généralisation d'un théorème de Minkowski, *CRAS* 191 (1930), 1282-1285

- *Sur les unités des corps de nombres algébriques, *CRAS* 192 (1931), 24-28, errata (typos) 188

- *†Sur la théorie des groupes de décomposition, d'inertie et de ramification, *Journal de mathématiques pures et appliquées* (9) 10 (1931), p. 481-498

- *†Sur les théorèmes du genre principal et des idéaux principaux, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 9 (1931), p. 84-92

- †avec C. Chevalley, Nouvelle démonstration du théorème d'existence en théorie du corps de classes, *CRAS* 193 (1931), 814-815

Les publications en théorie des nombres

- *†Sur les classes des corps circulaires, *Journal de mathématiques pures et appliquées* (9) 15 (1932), p. 417-441

- †Sur une propriété du discriminant des corps algébriques, *Annales de l'Ecole normale supérieure* 49 (1932), 105-112

- †Théorie arithmétique des corps de nombres de degré infini I, *Mathematische Annalen* 106 (1932), p.473-501; II 108 (1933), p. 699-717, rédigé par C. Chevalley

- †Brief an E. Noether, *Mathematische Annalen* 106 (1932), 502

- †*Le développement moderne de la théorie des corps algébriques*. *Corps de classes et lois de réciprocité*, Mémorial des Sciences mathématiques, Paris, Gauthier-Villars, 1936 (réd. et appendice par C. Chevalley)

Paris 1925-1930

- 1925 : Entrée à l'ENS
- 1928 : 1ère note aux CRAS, Agrégation de mathématiques
- 1929 -1930 : Service national
- 11 juin1930 : Soutenance de Thèse (Vessiot, Denjoy, Fréchet)

Rue d'Ulm 1919-1930 : l'après-guerre

- **Déjà à l'Ecole j'avais été très frappé du dommage causé aux mathématiques en France par la guerre de 14-18 ; elle avait creusé un vide que ma génération et la suivante ne trouvèrent pas facile à combler.[…] En France un souci mal entendu d'égalité devant le sacrifice, louable sans doute dans son principe , avait conduit à une politique tout opposée [à celle de l'Allemagne], dont les conséquences désastreuses peuvent se lire par exemple sur le monument aux morts de l'Ecole normale. Ce furent là des pertes cruelles ; mais ce ne fut pas tout. Quatre ans ou plus de vie militaire, près ou loin de la mort, mais en tout cas loin de la science, ne sont pas une bonne préparation pour y revenir ; fort peu de ceux qui avaient survécu retrouvèrent l'intérêt qu'ils y avaient pris. (André Weil ,** ***Souvenirs d'apprentissage***, **p. 172)**

Rue d'Ulm 1919-1930 : l'après-guerre

- **Mort au combat de 87 des 331 normaliens des promotions 1900-1918, et plus de 45% des promotions de la guerre (Martin Andler, Bicentenaire de l'ENS, 1994)**
- **En 1910, la quasi-totalité des professeurs de mathématiques ou de mécanique à la Sorbonne étaient d'anciens normaliens.**
- **Promotion 1911 S de l'ENS : 19 élèves, 8 morts (P. Lambert, R. Vidil, assistant aux cours de Humbert et de Châtelet) et 3 blessés (dont Gaston Julia).**

Rue d'Ulm 1919-1930: La science française

- **Les mathématiciens sont comme les Français, dites-vous, c'est sans doute que les uns comme les autres aiment la logique et la précision ; qu'ils ont l'art de filtrer les notions troubles et le don de clarifier les idées obscures, plus particulièrement celles des Allemands ; enfin qu'ils ont une aptitude innée pour apercevoir les choses sous leur aspect général. (1924, Cinquantenaire de la SMF, Charles de la Vallée-Poussin, reprenant une phrase de Goethe — « Die Mathematiker sind eine Art Franzosen, redet man zu ihnen, so übersetzen sie es in ihre Sprache und dann ist est also bald ganz anders », *Bulletin SMF*, 52, 1924, Vie de la société, p. 36).**

Rue d'Ulm 1919-1930: La science française

Le 11 novembre 1925, le gouvernement remet la Croix de guerre à l'ENS : Paul Painlevé, président du Conseil
« donna lecture de la citation à l'ordre de l'armée… Puis un ancien élève, grand blessé de la face, M. Julia, professeur à la Faculté des sciences, présenta un coussin sur lequel Painlevé épingla la croix »
Julia la déposa ensuite devant le Monument aux morts.

Paris 1925-1930: Le désert arithmétique

- **J'ai souffert dans ma jeunesse d’absence totale d’enseignement à Paris des développements modernes de la théorie des nombres et de l’algèbre, et de la position d’infériorité au départ dans laquelle cette carence plaçait le jeune chercheur français qui désirait s’intéresser à ces questions. Claude Chevalley à Arnaud Denjoy, 23 mai 1954**

Paris 1910-1930 : Le désert arithmétique ?

- **1911** Traduction française de *Corps de nombres quadratiques*, par J. Sommer
- Thèse d'Albert Châtelet sur l'application des matrices à l'arithmétique des nombres algébriques
- **1912-1913** Traduction française du *Rapport sur les nombres algébriques de* D. Hilbert
- Cours Peccot de Châtelet au Collège de France sur la théorie des nombres
- Georges Humbert sur équations algébriques et théorie de Galois au Collège de France
- **1914** Cours de théorie des nombres par Eugène Cahen à la Sorbonne
- Thèse de Théophile Got sur les formes indéfinies ternaires et les groupes fuchsiens
- Humbert sur les équations modulaires
- **1916** Humbert sur les formes quadratiques et la théorie des groupes
- **1917** Thèse de Gaston Julia sur la réduction des formes
- **1918** Humbert sur théorie des nombres et analyse
- **1919** Humbert sur corps de nombres quadratiques
- **1920** Exposé de Châtelet sur les lois de réciprocité à l'ICM (Strasbourg)
- **c. 1922** Exposés sur travaux de Thue, Siegel, E. Noether au Séminaire Hadamard
- André Weil entre à l'ENS
- **1923-26** Paul Dubreil, Jacques Herbrand, Claude Chevalley, ... entrent à l'ENS
- **1927-1928** Thèse de Weil sur l'arithmétique des courbes algébriques
- **1934** Séminaire Julia

La coupure des années 1920

Thèses de théorie des nombres et d'algèbre en France dans l'entre-deux guerres (d'après Juliette Leloup)

[Pour mémoire: 1911: A. Châtelet: Sur certains ensembles de tableaux et leur application à la théorie des nombres]

- **1914-1919 : 3 sur 18**

Théophile Got: formes quadratiques ternaires indéfinies et groupes fuchsiens
Jacques Chapelon: Relations entre nombres des classes de formes
Gaston Julia: Formes binaires non quadratiques

- **1920 - 1924 : 0 sur 29**

- **1925 - 1929: 3 sur 44**

Phillipe Le Corbellier : formes quadratiques à indéterminées conjugées
André Weil: arithmétique sur les courbes algébriques
Miecislas Biernacki: équations algébriques à paramètres arbitraires

La coupure des années 1920

Thèses de théorie des nombres et d'algèbre en France dans l'entre-deux guerres (d'après Juliette Leloup, suite)

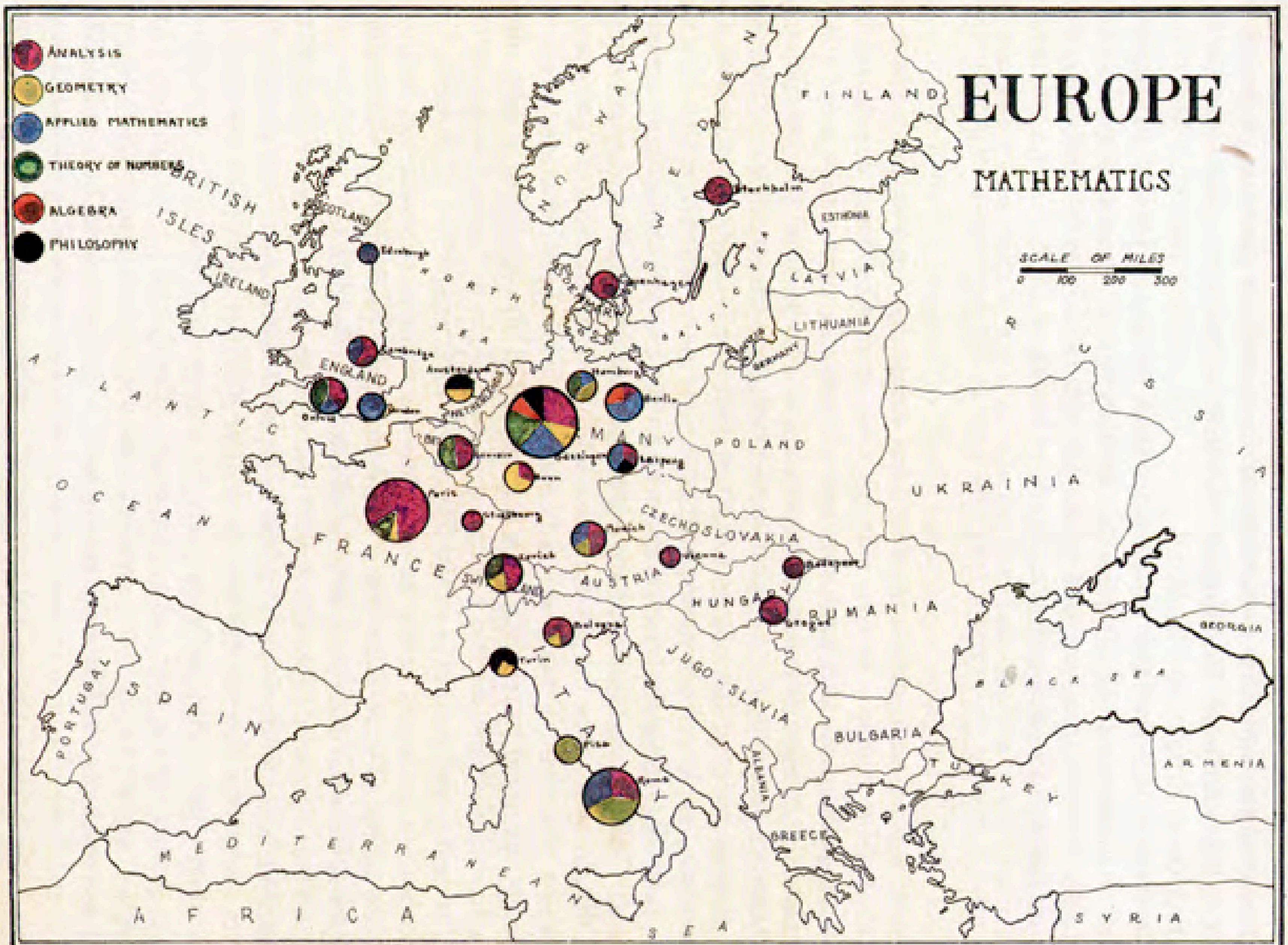
• **1930-1934**: 3 sur 55 (+1 doctorat d'université sur 9)
Paul **Dubreil**: exposants des composants primaires des idéaux de polynômes
Marcel **Courrier** (Strasbourg) : solutions entières des équations de genre 0
Claude **Chevalley**: théorie du corps de classes dans les corps finis et locaux

• **1935 -1939**: 5 sur 55 (+1 doctorat d'université sur 13)
Marc **Krasner**: ramification des idéaux de corps non galoisiens de nombres algébriques
Charles **Pisot** : répartition modulo un et nombres algébriques
Claude **Chabauty** : équations diophantiennes liées aux unités d'un corps de nombres algébriques
Jean **Kuntzmann**: Etude des systèmes multiformes
J.-M. **Oudin** (Montpellier) : Etude sur les divers calendriers

La philanthropie scientifique selon Rockefeller

(d'après R. Siegmund-Schultze, *Rockefeller and The Internationalization of Mathematics Between the Two World Wars*, 2001)

- "Make the peaks higher" : Paris, Göttingen, Rome
- Résoudre le problème de la communication scientifique ("travelling fellowships")
- Résoudre le problème de l'International Research Council (exclusion des ICM)


EUROPE
MATHEMATICS
ANALYSIS
GEOMETRY
APPLIED MATHEMATICS
THEORY OF NUMBERS
ALGEBRA
PHILOSOPHY
SCALE OF MILES
0 100 200 300
FINLAND
ESTHONIA
LATVIA
LITHUANIA
POLAND
UKRAINIA
CZECHOSLOVAKIA
AUSTRIA
HUNGARY
RUMANIA
JUGO-SLAVIA
BULGARIA
ALBANIA
GREECE
TURKEY
GEORGIA
ARMENIA
SYRIA
BLACK SEA
FRANCE
SPAIN
PORTUGAL
IRELAND
SCOTLAND
ENGLAND
BRITISH ISLES
NORTH SEA
BALTIC SEA
ATLANTIC OCEAN
MEDITERRANEAN SEA
AFRICA
Stockholm
Edinburgh
Copenhagen
Cambridge
Oxford
London
Amsterdam
Hamburg
Berlin
Paris
Strassburg
Munich
Vienna
Budapest
Zurich
Bologna
Turin
Pisa
Rome

Rockefeller

Jean **Favard**, IEB Rockefeller en 1925-6: Harald Bohr à Copenhague, Blaschke et Hecke à Hamburg

André **Weil**, (bourse Sorbonne) 1925 Rome (Volterra, Zariski, Severi, Mandelbrojt); 1926-7 (Rockefeller) Göttingen (Courant, Noether, Van der Waerden, Grell, Paul Alexandrov), Berlin (Hopf, Erhardt Schmidt), Francfort (Siegel, Dehn, Hellinger, etc. Court séjour à Stockholm (Mittag-Leffler). C'est via une autre boursière Rockefeller Mayme Logsdon, élève américaine de Dickson venue travailler à Rome qu'il a connaissance de l'article de Mordell de 1922.

Paul **Dubreil** , Rockefeller IEB scholarship, 1929-1931, surtout Hamburg (Artin), mais aussi Göttingen et Francfort, discute avec Van der Waerden (à Groningen en 1930) et Emmy Noether. Va aussi pendant cette période à Rome (Castelnuovo, Enriques, Severi).

Jacques **Herbrand**, NSD Rockefeller : octobre 1930-mai 1931 à Berlin (v. Neumann), mai-juin 1931 à Hamburg (Artin), mi-juin-mi-juillet 1931 à Göttingen (Noether) ; participe à la Schiefskonferenz à Marburg.

Claude **Chevalley**, IEB Rockefeller, 1931-32, Hamburg (Artin), Marburg (Hasse)

Berlin, Hamburg, Göttingen 1930-1931

Nun zum "Schiefkongress".[9] Ich werde also "Hyperkomplexe Struktursätze mit zahlentheoretischen Anwendungen" bringen, um dem Kind einen Namen zu geben. Übrigens hoffe ich tatsächlich, etwas über Führersätze sagen zu können: erste Ansätze habe ich, und zwar für die hyperkomplex leichter zugängliche Differentenzerlegung, aus der dann die Artinsätze durch Normbildung folgen würden. Ob ich aber *soweit* komme, weiß ich nicht, sonst kommen die alten Anwendungen!

Ich würde als Vortragsreihenfolge vorschlagen: R. Brauer, Noether, Deuring, Hasse. Dann kann jeder sich auf den Vorhergehenden berufen. Die übrigen Vorträge sind ja unabhängig.

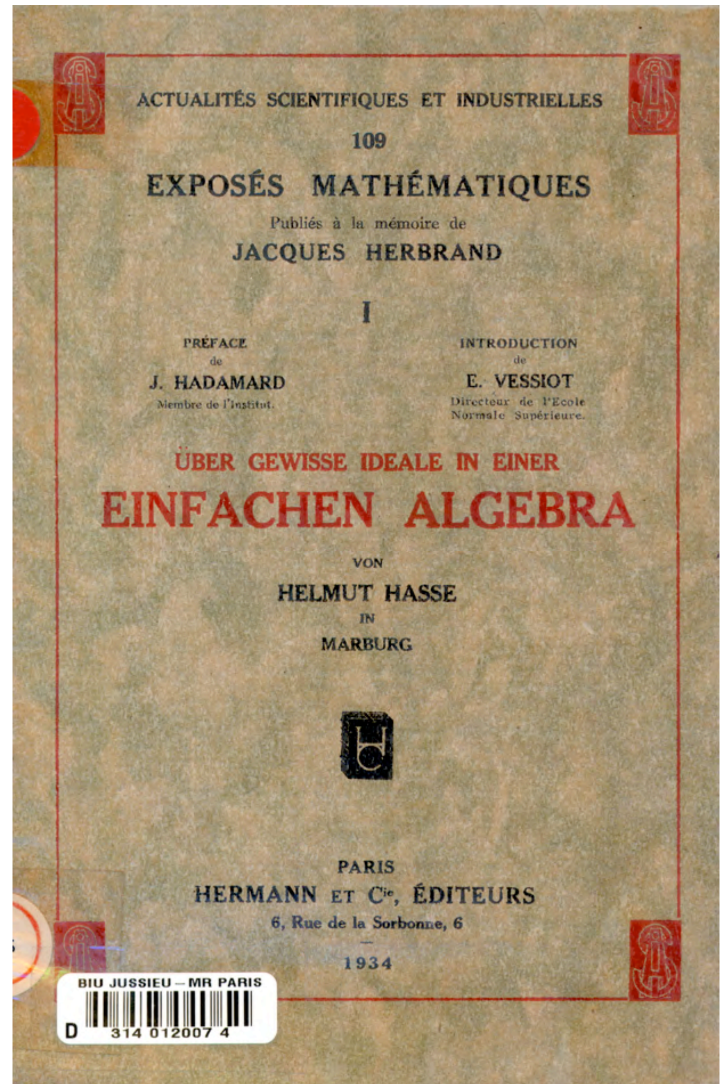
Dann möchte ich auch vorschlagen, auch meinen Rockefeller-Stipendiaten für den nächsten Sommer – der jetzt bei von Neumann in Berlin ist – aufzufordern: Dr. J. Herbrand, Berlin-Charlottenburg, Mommsenstr. 47, bei Ehrmann. Als Rockefellerstipendiat bekommt er die Reise bezahlt; Sie haben also keine Kosten. Er kam nach Halle, und hat am meisten von allen von meinen Sachen verstanden.[10] Er hat bis jetzt außer Logik nur Zahlentheorie gearbeitet (die er aus Ihrem "Bericht" und Ihrer Normenresttheorie gelernt hat[11]); ich dachte an ihn nur als Zuhörer. Eventuell könnte er aber über seine durch die Einheitengruppen vermittelten ganzzahligen Darstellungen der Galoisgruppe vortragen; das ist wahrscheinlich nahe mit meinen hyperkomplexen Sachen zusammenhängend (C[omptes] R[endus] Januar[12].). Wir hatten in Halle alle einen ausgezeichneten Eindruck von ihm.

Beste Grüße, Ihre Emmy Noether.

Lettre à Hasse, 8 février 1931, in *Helmut Hasse - Emmy Noether. Their correspondence 1925 - 1935*, éd.,Franz Lemmermeyer et Peter Roquette

Les exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand

- **I : Helmut Hasse VII: Richard Brauer**
- **II: Jean Dieudonné VIII: Shokichi Iyanaga**
- **III: John Von Neuman IX: Henri Cartan**
- **IV: Emmy Noether X: Reinhold Baer**
- **V: Nikoleï Lusin XI: André Weil**
- **VI: Jean Delsarte XII: Paul Dubreil**



Théorie des corps de nombres

- **k un corps de nombres, O_k anneau des entiers**
- **Dedekind : tout idéal se décompose de manière unique en produit d'idéaux premiers**
- **Théorème des unités de Dirichlet**

Théorie du corps de classes

- **K/k une extension (finie, galoisienne) de corps de nombres**
- **Description 1 : comprendre comment un idéal de O_k se comporte dans O_K : $P\,O_K = P_1^{e_1} P_2^{e_2} \ldots P_g^{e_g}$, $NP_i = P^{f_i}$**
- **Description 2 : décrire les extensions K à partir d'éléments de k**

La théorie du corps de classes a une réputation de difficulté qui est en partie justifiée. Mais il faut faire une distinction : il n'est peut-être pas en effet dans la science de théorie où tout à la fois les démonstrations soient aussi ardues, et les résultats d'une aussi parfaite simplicité et d'une aussi grande puissance. La difficulté des démonstrations ne résulte pas d'ailleurs de la complexité de leur structure logique, mais bien plutôt du fait qu'à chaque pas on a besoin de formules précises, dont l'établissement demande à chaque fois des calculs longs et délicats.

J. Herbrand, *Le développement moderne de la théorie des corps algébriques*, p. 2

Théorie du corps de classes

<< 4 aspects de la théorie des nombres qui fusionnent >>

(Günther Frei, in *The History of Modern Mathematics* I, 1989)

- **théorie des genres et de la représentation des entiers par des formes**
- **construction explicite (transcendante) d'extensions abéliennes**
- **fonctions zeta, L, nombres premiers en progression arithmétique**
- **extensions non ramifiées**

Disquisitiones arithmeticae, C. F. Gauss, 1801

Fig. I.1. A newspaper review of the *Disquisitiones Arithmeticae* *Gazette nationale, ou le Moniteur universel*, March 21, 1807

- **Théorie des congruences,**
  $a \equiv b \bmod c \Leftrightarrow c$ divise $b-a$
- **Classification des formes quadratiques binaires à coefficients entiers (classes et genre)**
- **loi de réciprocité quadratique**
- **Théorie de l'équation $x^n-1=0$, application aux polygones réguliers inscriptibles dans un cercle**

Lois de réciprocité supérieures et décomposition des entiers en nombres premiers complexes

- **1835-1850 : Jacobi, Eisenstein, Dirichlet, Hermite, Kummer, ..., s'intéressent à cette configuration : formes quadratiques, congruences, décomposition en facteurs complexes, lois de réciprocité.**
- **Voies différentes, mais interactions fortes.**
- **Analyse, algèbre, arithmétique proches, étude gaussienne de l'équation x^n-1=0 comme modèle**

"La théorie des corps de nombres est comme un édifice d'une beauté et d'une harmonie admirables ; et c'est comme point culminant de cet édifice qu'apparaît la théorie des corps abéliens et relativement abéliens, que Kummer par ses travaux sur les lois de réciprocité supérieure et Kronecker par ses recherches sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques nous ont découverte."

D. Hilbert, *Zahlbericht*, 1897

Lois de réciprocité et décomposition

• Exemple simple

Si un nombre premier p impair divise une somme de carrés, alors $p = x^2 + y^2$.

$p = x^2 + y^2$ ssi $p \equiv 1 \mod 4$ ssi $p = (x + iy)(x - iy)$, autrement dit (p) se décompose en deux idéaux principaux distincts, de norme p.

• Exemple un peu moins simple

$3.7 = 21 = 1^2 + 5.2^2$, mais 3 n'est pas de la forme $x^2 + 5y^2$

Ici:

$p = x^2 + 5y^2$ ou $p = 2x^2 + 2xy + 3y^2$ ssi p se décompose en deux idéaux distincts dans $Z[\sqrt{-5}]$ ssi $p \equiv 1, 9, 3, 7 \mod 20$.

• Soit d un entier sans facteurs carrés et soit un nombre premier $p \not| 2d$. alors (p) se décompose complètement dans l'anneau des entiers de $Q[\sqrt{d}]$ ssi $x^2 - d \equiv 0 \bmod p$ a une solution.
On voudrait des conditions modulo d (fixé), ok grâce à loi de réciprocité quadratique.
Soit

$$(\frac{a}{p})=0 \text{ si } p|a,$$

$$1 \text{ si } a \equiv x^2 \bmod p \text{ a une solution},$$

$$-1 \text{ sinon}$$

Loi de réciprocité quadratique : p et q des nombres premiers impairs,
$(\frac{q}{p})= (\frac{p}{q})$ sauf si $p \equiv q \equiv 3 \bmod 4$; dans ce cas, alors $(\frac{q}{p})= -(\frac{p}{q})$

Extensions abéliennes explicites

• Théorème (Kronecker-Weber) : Toute extension abélienne de Q est engendrée par des racines de l'unité.
Racine de l'unité : $\epsilon = e^{\frac{2i\pi}{M}}$, i. e. des valeurs de l'exponentielle en des points dont un multiple entier est dans le groupe de périodes de la fonction.

• "Jugendtraum" de Kronecker : étendre aux extensions abéliennes relatives, en particulier sur corps quadratique imaginaire (fonctions elliptiques et modulaires).

Fonction modulaire

$$j = 1728 \frac{(60G_2)^3}{(60G_2)^3 - 27(140G_3)^2} = \frac{1}{e^{2i\pi z}} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2i\pi n z},$$

avec $G_k(z) = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(mz+n)^{2k}}$
Si $\mathfrak{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ est un idéal de $K = Q(\sqrt{-d})$, alors $j(\alpha_1/\alpha_2)$ ne dépend pas de la base.
"Les valeurs de j engendrent une extension abélienne H de K, de groupe de Galois isomorphe au groupe des classes d'idéaux de K".
Les idéaux de K deviennent principaux dans H
L'extension H n'est pas ramifiée

Corps de classes selon Takagi

- **Un corps galoisien K/k est corps de classes pour un groupe d'idéaux H de conducteur m si toutes les normes d'idéaux de K premiers à m sont dans H et si l'indice de H dans le groupe A_m des idéaux premiers à m est le degré de K/k.**
- **A tout groupe H correspond un et un seul corps de classes**
- **Gal (K/k) isomorphe à A_m /H [Artin : canonicité]**
- **m et discriminant relatif ont même facteurs premiers**
- **Tout sur-corps abélien de k est corps de classes de k pour un H**

Le travail d'Herbrand

- Ramener certains énoncés à résultats sur les groupes
- Groupes d'inertie et de ramification pour les corps intermédiaires
- cas des extensions infinies (limites projectives, inductives)
- Simplification de critères de Kummer sur le théorème de Fermat
- Simplification du théorème d'existence des corps de classes

La mathématique pure est complètement indifférente aux choses actuelles et se trouve indépendante de la nature de ce qui existe...Les contradictions ne sont que des erreurs et pour les résoudre, on n'a besoin que de la patience et du génie de l'analyste. On a abusé en philosophie des solutions héroïques, on a trop souvent négligé les travaux de détail. On a eu trop peu de patience. La vraie méthode en philosophie comme en science sera inductive, minutieuse, respectueuse du détail.

Bertrand Russell, 23 mars 1911, Société française de philosophie