Berlin, den 7. April,

Mommsenstr. 47
bei Ehrmann.

Sehr geehrter Herr Bernays,

Ich ~~mit~~teile Ihnen den Brief mit, den ich Herrn Gödle geschrieben habe. Er enthält gewisse Uberlegungen die vielleicht Sie interessieren können. Sie werden darin die genaue Tragweite meines Theorems über die Widerspruchlosigkeit der Arithmetik finden (wie ich es Ihnen schon gesagt habe, ist in meinen Ergebnissen die unbeschränkte Benutzung des $\varepsilon$-Axioms immer gestattet). In meiner Arithmetik ist das Axiom der Vollständigen Induktion beschränkt, aber man darf allerlei andere Funktionen benutzen als diejenige die durch einfache Rekursion definiert sind: in dieser Richtung, scheint es mir dass mein Theorem etwas weiter geht als das Ihrige.

Ich suche auch in diesem Brief zu zeigen wie Ihre Ergebnisse mit diesen von Gödle übereinstimmen können.

Es schien mir besser Ihnen diesen Brief zuschicken, als alles das Ihnen mündlich zu erzählen, denn was geschrieben ist, ist immer genauer als was gesprochen ist. Aber ich würde mich sehr freuen mit Ihnen von allen diesen Fragen noch einmal zu sprechen, bevor Sie nach Göttingen zurück fahren.

Hochachtungsvoll,

Ihr sehr ergebener

J. Herbrand

J. HERBRAND
bei Ehrman
Mommsenstr. 47 (Chlttbg)

Berlin,den 7.April 

Sehr geehrter Herr Gödle!

Ich schicke Ihnen gleichzeitig Sonderabdrücke einiger meiner Arbeiten von mathematischer Logik.Herr v.Neuman hatte mir von Ihren Arbeiten gesprochen,und vor Kurzem hat mir Herr Bernays ~~mir~~ eine Korrektur Ihrer nächsten Abhandlung mitgeteilt.Sie hat mich sehr interessiert,und ich möchte hier einige Bemerkungen machen,die Ihre Ergebnisse mir zum Gedanken bringen.

Betrachten wir die Arithmetik;ich möchte zuerst ihre Axiome genau schreiben.Wir haben darin nur ein Variablen-Typus,eine Konstante,0,eine Funktion x + I,und einen primitiven Ausdruck $x = y$.

Wir haben die üblichen Axiomen:

alle die logischen Axiome

$$\left.\begin{array}{l} x = x \qquad x = y \supset y = x \qquad x = y \times y = z . \supset . x = z \\ x + 1 \neq 0 \\ x + 1 = y + 1 \;\equiv .\; x = y \end{array}\right\} \quad (\mathrm{I})$$

und das Axiom der vollständigen Induktion:

$$\varphi_0 \times . (x) . \varphi x \supset \varphi x+1 :\supset . (x) \varphi x \qquad (2)$$

Nennen wir dieses Axiom~~e~~ (2') wenn wir fordern dass in $\varphi x$ keine gebundenen Variablen(keine Sein- oder All-zeichen)stehen.

Ausserdem,haben wir in Arithmetik andere Funktionen,zum Beispiel ~~die~~ durch Rekursion definierte~~n~~ Funktionen ,die ich werde mit folgenden Axiomen definieren. Nehmen wir an dass wir alle die Funktionen $f_n(x_1, x_2 \dots x_{p_n})$ einer gewissen endlichen oder unendlichen Menge F definieren wollen. Iede $f_n(x_1 \dots)$ wird gewisse Definitionsaxiome haben, alle diese Axiome werde ich die Axiome (3 F) nennen. Diese Axiome werden folgende Bedingungen genügen:

1) 2) 3)

I) Die Definitionsaxiome von $f_n$ enthalten, ausserdem $f_n$, nur Funktionen von kleinerem Index.

$a+0=a$

$a+0'=a'$

2) Diese Axiome enthalten nur freie Variablen und Konstanten.

$a+(b+c)=(a+b)+c$

$b=c \to a+b=a+c$

3) Man muss, mit intuitionnistischen Beweisen, zeigen können, dass es möglich ist ~~das~~ Wert der Funktionen für jedes bestimmtes Wertsystem ihrer Argumente mit diesen Axiomen eindeutig zu berechnen.

Zum Beispiel, haben wir folgende Beispiele:

a) Die Funktionen $x + y$ und $x.y$, die die Menge $E_1$ machen, die ~~definitaxiome~~ mit folgenden Axiomen definiert sind:

$$\left.\begin{array}{ll} x+0=x & x+(y+1)=(x+y)+1 \\ x.0=0 & x(y+1)=xy+x \end{array}\right\} 3' \text{ ou } 3\,E_1$$

$b=c \to a+b=a+c$

$0+(0+0)=0$

b) Ihre ~~r~~ rekursiven Funktionen, $\varphi_c(x_1 \dots x_{n_i})$, (ich werde ihre Menge durch $E_2$ bezeichnen), mit folgenden Axiomen definiert:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_c(0, x_2 \dots x_{n_i}) = \psi(x_2 \dots x_{n_i}) \\ \varphi_c(k+1, x_2 \dots x_{n_i}) = \mu(k, \varphi(k, x_2 \dots x_{n_i}), x_2 \dots x_{n_i}) \end{array}\right\} 3'' \text{ ou } 3\,E_2$$

c) Aber in meinem allgemeinen Schema, können viel andere Funktionen definiert sein. Nehmen wir zum Beispiel die Hilbert'sche Funktion (in seiner Abhandlung "Über das Unendliche"), $\varphi(a, a, a)$, die mit folgenden Axiomen definiert ist:

$$\varphi(n+1, a, b) = \varphi(n, a, \varphi(n+1, a, b-1))$$
$$\varphi(n, a, 0) = a$$
$$\varphi(0, a, b) = a+b$$

$\varphi(0, a, b) = a \cdot b$

$\varphi(n', a, 0) = 1$

$\varphi(n', a, b') = \varphi(n, a, \varphi(n', a, b))$

I) Bemerken wir zuerst dass jeder intuitionnistischer Beweis, kann in einer Arithmetik geführt werden, ~~mit~~ ohne nur die Axiome I, 2' und 3 für eine gewisse Menge F von Funktionen (die von dem Beweis abhängt), benützt

$(a = b \Rightarrow c + a = c + b)$

$\cancel{a = b}$

$a = b \rightarrow a + c = b + c$ def $S_c$.

$$\left.\begin{aligned} 0 + a &= a \\ 0' + a &= a' \end{aligned}\right\} \text{ def } S_a$$

$\cancel{a + (0' + b)}$

$a + (b + c) = (a + b) + c$ )n

$a + (b + 0) = a + b$

$a + (b + c') =$

$a + (0 + 0) = a$ *

$0 + (0 + 0) = 0$

Und jeder Beweis in dieser Arithmetik, der keine gebundene Variablen besitzt, ist intuitionnistisch: diese Tatsache hängt von der Definition unserer Funktionen ab, und man kann es unmittelbar sehen.

Eine Theorie mit den Axiomen I, 2' und 3 F, werde ich durch I+2'+3 F bezeichnen.

2) Es folgt unmittelbar aus meiner Methoden dass alle diese Theorien I +2'+3 F widerspruchslos sind (wenn wir gebundene Variablen benutzen).

3) Sie haben bewiesen, dass, wenn man Ihre Methoden einer Arithmetik mit den Funktionen $E_1$ anwenden kann, man die Funktionen $E_2$ braucht (um Ihre Funktionen zu bauen). Im allgemein, wenn man Ihre Methoden einer Arithmetik mit den Funktionen einer Menge F anwenden will, braucht man eine grössere Menge von Funktionen (man kann es genau beweisen: es ist sehr leicht).

4) Sie beweisen, dass I + 2 + 3" mit I +2 + 3' equivalent ist (aber man kann nicht beweisen dass I + 2' + 3" mit I + 2' + 3' equivalent ist). Herr Bernays hat mir gesagt dass er die Widerspruch-
Ackermann
losigkeit von I + 2 + 3' bewiesen hat; aus Ihren Methoden folgt dass seiner Beweis nicht in I + 2+ 3' formalisierbar ist, und auch nicht in I + 2 + 3"; mit anderen Worten, in seinem Beweis mussen gewisse Funktionen liegen, die nicht der Addition und der Multiplikation (wie Ihre rekursiven Funktionen) reduzierbar sind. In meinem Beweis, im Gegenteil, braucht das nicht der Fall zu sein.

Aber man sieht leicht dass viele andere Funktionen als die rekursiven Funktionen der Addition und der Multiplikation reduzibel sind. Es ist mir gar nicht gelungen eine solche Funktion zu ersinnen die nicht diese Eigenschaft besitzt. Ein Beispiel einer solchen Funktion (der aus dem Bernays'schen Beweis ausgezogen sein muss), würde sehr interessant sein.

5)Ich bin so der folgenden Bemerkung geführt:ich verstehe gar nicht wie es möglich sei,dass es intuitionnistische Beweise gibt,die nicht im Russel'schen System formalisierbar sind;mit anderen Worten wie es eine Arithmetik mit den Axiomen I + 2+ 3 F geben kann,die nicht in diesem System übersetzbar ist.Nur ein Beispiel konnte mich davon überzeugen;aber ich glaube nicht dass man beweisen kann dass jeder intuitionnistischer Beweis in Russel'schen System formalisierbar ist,und auf folgenden Gründen:

Nehmen wir an dass wir eine gewisse Menge E von Funktionen haben, mit gewissen Axiomen,so dass man immer feststellen kann ob gewisse Definitionsaxiome unter diesen Axiomen sind,oder nicht.Man kann immer,unter diesen Bedingungen,andere Funktionen definieren,die von allen den vorigen verschiden sind.Man sieht das~~s~~ mit dem Diagonalverfahren:man kann immer,intuitionnistisch,ein Verfahren beschrieben um alle

die Funktionen die nur eine Variable haben, und mit den Funktionen E gebaut werden können

~~unsere~~ Funktionen unter dem Form $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3 \dots)$ schreiben;dann ist die Funktion $f_n(n) + 1$ von allen ~~Xxxxxx~~ den anderen und von allen ihren Kombinationen verschieden.(Um Ihre Methoden einer Arithmetik die alle die Funktionen der Menge E enthält zu anwenden,muss man immer ~~diese~~ solche Funktionen bauen:daraus kommt was ich in 2)sagte.)

Mit anderen Worten,ist es unmöglich alle die Verfahren Funktionen intuitionnistisch zu bauen genau zu beschreiben:wenn man solche Verfahren beschreibt,gibt es immer Funktionen die nicht mit diesen Verfahren gebaut sein können:man kann nicht die intuitionnistischen Methoden mit einer endlichen Zahl von Worten beschreiben.Diese~~r~~ Tatsache scheint mir sehr merkwürdig.

Sie verstärkt meine Überzeugung dass~~xx~~ es unmöglich ist ~~ein axiomatisierbares System zu finden,~~ zu beweisen dass jeder intuitionnistischer Beweis im Russel'schen System formalisierbar ist, aber dass man nie ein Gegenbeispiel finden wird.Man wird vielleicht gezwungen sein, dort eine Art von logischen Postulat anzunehman.

Entschuldigen Sie diese langen Uberlegungen, die vielleicht, wegen meiner schlechten Kenntnis der deutschen Sprache, nicht vollkommen klar sind. Aber es sind in diesen Fragen noch viel geheimnisvolle Tatsachen, und diese Frage der Formalisierung der intuitionnistischen Beweise scheint mir sehr wichtig zu sein, für die philosophische Meinung der Metamathematik.

Hochachtungsvoll,

Ihr sehr ergebener

J. HERBRAND

Ich bin nur noch ~~xxx~~ für ein kurzes Zeit in Berlin; meine gewöhnliche Adresse ist:

IO Rue Viollet le Duc,

PARIS (9)

M: ⊢ wenn R, $e/2 = 3$. (I + 2 + 3')

$\cdot \sim n$:

$\left(A(n)\left(Sb\left(r \, {17 \atop Z(n)}\right) \to \text{Bew}\, Sb\left(r \, {17 \atop Z(n)}\right)\right)\right)$ ?

---

$a = \ldots \to a + a = b + b$

$a + \ldots = 0 \to c + a = c$

$a = b'$

IV